|  |
| --- |
| **NÚMEROS RACIONALES** |

Un Número Racional es el que se puede expresar como cociente de dos números enteros, es decir, en forma de fracción.

Los números enteros son racionales, pues se pueden expresar como cociente de ellos mismos, equivaliendo a la unidad: a =

El conjunto (**Q)** de los números racionales está compuesto por los números enteros y por los fraccionarios. Se pueden adicionar, sustraer, multiplicar y dividir (salvo por cero) y el resultado de todas esas operaciones entre dos números racionales es siempre otro número racional.

Los números racionales no enteros se llaman fraccionarios. El conjunto de todos los números racionales se designa por **Q.**

Así como en el conjunto Z de los números enteros cada número tiene un siguiente (el siguiente al 7 es el 8, el siguiente al -5 es el -4), no pasa lo mismo con los racionales, pues entre cada dos números enteros existen infinitos números racionales.

Los números racionales sirven para expresar medidas, ya que al comparar una cantidad con su unidad, el resultado es, frecuentemente, un fraccionario. Al expresar un número racional, no entero, en forma decimal, se obtiene un número decimal exacto o bien un número decimal periódico.

Si la fracción es irreducible y en la descomposición factorial del denominador sólo se encuentran los factores 2 y/ó 5, entonces la fracción es igual a un número decimal exacto; pero si en el denominador hay algún factor distinto de 2 ó 5, la expresión decimal es periódica.

**Ejemplos:**

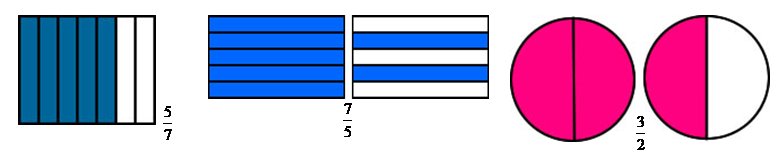
3 = 1,5 7 = 1,4 7 = 2, 333..... 1 = 0,16666....

2 5 3 6



* Un caracol quiere subir una pared de tres metros de altura, partiendo del suelo. El lunes sube 1/3 de la pared; de ahí en adelante sube cada día 1/3 de lo que había subido el día anterior.
  + ¿A qué altura habrá ascendido el martes, el miércoles, el jueves y el viernes?
  + ¿Cuántos días aproximadamente le tardará al caracol llegar hasta el final de la pared?

**REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS RACIONALES**



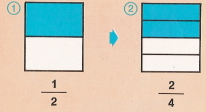
|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | | Podemos observar que el número total de partes en los cuales se divide la unidad representa el denominador y las partes que se toman, es decir las partes coloreadas, representan el numerador. |  |  | |

**RACIONALES EQUIVALENTES**

Dos o más fracciones son equivalentes si representan el mismo valor

**Por ejemplo:**

Las fracciones  y  son fracciones equivalentes



Es posible identificar si dos o más fracciones son **equivalentes** cuando al multiplicarlas en cruz se obtiene el mismo resultado.

- **Ejemplo:**  
Las fracciones  y  son equivalentes porque 4 x 30 = 20 x 6   
 120 = 120

- **Ejemplo:**   
Las fracciones  y  **no** son equivalentes porque 3 x 18 no da lo mismo que 12 x 5

También se puede comprobar si dos fracciones son equivalentes realizando el cociente (numerador entre denominador) y comprobando si se obtiene el mismo resultado en ambas.

**COMPLIFICACIÓN**

Para encontrar una fracción equivalente a otra, multiplicamos el numerador y el denominador por el mismo número.

**Ejemplo:** Encontremos una fracción equivalente a 7/3 por amplificación.

7 x 4 = 28

3 x 4 12

**SIMPLIFICACIÓN**

Para encontrar una fracción equivalente a otra, dividimos el numerador y el denominador por el mismo número.

**Ejemplo:** Encontremos una fracción equivalente a 16/6 por simplificación.

16 **÷** 2 = 8

6 **÷** 2 3

**ORDEN DE LOS NÚMEROS RACIONALES**

Cuando dos números racionales tienen el mismo denominador, es mayor el que tiene mayor numerador

**RACIONALES Y LA RECTA NUMÉRICA**

**Ejemplo:** Ubiquemos en la Recta Numérica las los números racionales:

1 , 2 , 5 , 10

3 3 3 3

* 1. Dibujamos una Recta Numérica con los números naturales, con buena separación entre ellos de la siguiente manera:



* 1. El espacio que hay entre cada número se considera una unidad, por lo tanto, se divide en tres partes cada una de la siguiente manera (se divide en tres partes iguales porque ese es el denominador de las fracciones dadas, e indica que en ese número de partes debemos dividir la unidad)



* 1. Ahora cada subdivisión equivale a 1/3. Procedemos a ubicar los números.



BD00038_

**OPERACIONES CON LOS NÚMEROS RACIONALES**

**ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS RACIONALES**

* **Racionales Homogénoas:** Son aquellos que tienen igual denominador.

Para adicionar o sustraer números racionales homogéneos se coloca el mismo denominador y se suman los numeradores

**Ejemplo:** 2 + 4 + 7 = 2 + 4 + 7 = 13

3 3 3 3 3

5 - 4 = 5 - 4 = 1

3 3 3 3

* **Racionales Heterogéneos:** Son aquellos que tienen diferentes denominadores.

Para adicionar o sustraer números racionales heterogéneos, se multiplican los denominadores entre sí y ese será el denominador de la respuesta, luego se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda. Se coloca el mismo signo (de operación) y se procede a multiplicar el numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera fracción. En cada caso se debe simplificar la respuesta si es posible.

**Ejemplo:** ****

1. Se multiplican los denominadores 4 x 3 = 12
2. Se multiplican el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda 3 x 3 = 9
3. Se coloca el signo más (+)
4. Se multiplica el numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera 7 x 4 = 28

Tenemos: ****

**Ejemplo:** **** Se aplica el mismo proceso anterior

****

**Resolvamos situaciones**

* Jessica Utiliza  kilo de azúcar morena y  kilo de azúcar pulverizado en la elaboración de una receta. ¿Cuánto azúcar utilizó en total?



Para averiguarlo hallaremos la suma entre los números racionales  y en este caso procedemos a realizar una adición de números racionales heterogéneos, puesto que los denominadores son diferentes.

 + = =

Por lo tanto podemos decir que Jessica utilizó kilo de azúcar para preparar

**PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE NÚMEROS RACIONALES**

**Propiedad Clausurativa:**

La suma de dos números racionales es otro número racional.

**a + b ∈ Q**

**c d**

**Ejemplo:**

3 + 5 = 8 = 4

2 2 2

**Propiedad Asociativa:**

Al adicionar tres o más números racionales podemos hacerlo agrupándolos de a dos en cualquier orden.

**a + b + c = a + b + c**

**d e f d e f**

**Ejemplo:**

4 + 6 + 5 = 4 + 6 + 5

7 5 8 7 5 8

**Propiedad** **Conmutativa:**

Al adicionar dos números racionales no importa el orden en que lo hagamos.

**a + b = b + a**

**c d d c**

**Ejemplo:**

7 + 15 = 15 + 7

5 12 12 5

**Elemento neutro**:

El número racional 0 / 1 es el elemento neutro de la adicionar de números racionales.

**a + 0 = 0 + a = a**

** b 1 1 b b**

###### Ejemplo:

2 + 0 = 0 + 2 = 2

9 1 1 9 9

###### Elemento Inverso

Todo número racional a / b posee un inverso aditivo (-a / b).

**a + - a = - a + a = 0 = 0**

**b b b b b**

**Ejemplo:**

8 + - 8 = - 8 + 8 = 0 = 0

7 7 7 7 7

|  |
| --- |
|  |

### MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

El producto de dos números racionales es otro número racional y cumple con las siguientes propiedades:

**Propiedad** **Conmutativa:**

Al multiplicar dos números racionales no importa el orden en que lo hagamos; es decir, el orden de los factores no altera el producto.

**a . b = b . a**

**c d d c**

**Ejemplo:**

9 . 3 = 3 . 9

2 7 7 2

**Propiedad Asociativa:**

Al multiplicar tres o más números racionales podemos hacerlo agrupándolos de a dos en cualquier orden.

SY00474_

**a . c . e = a . c . e**

**b d f b d f**

**Ejemplo:**

1 . 1 . 1 = 1 . 1 . 1

4 2 8 4 2 8

**Elemento neutro:**

El número racional 1 / 1 = 1 hace de elemento neutro de la multiplicación de números racionales.

**a . 1 = 1 . a = a**

**b 1 1 b b**

**Ejemplo:**

14 . 1 = 1 . 14 = 14

12 1 1 12 12

**Elemento inverso:**

Todo número racional a / b (a ≠ 0) posee un inverso multiplicativo b / a.

**a . b = b . a = 1**

**b a a b 1**

**Ejemplo:**

15 . 18 = 18 . 15 = 1

18 15 15 18 1

**Propiedad** **Distributiva:**

La multiplicación en **Q** es distributiva con respecto a la suma (también con respecto a la resta).

**a . c + e = a . c + a . e**

**b d f b d b f**

**Ejemplo:**

2 . 3 + 5 = 2 . 3 + 2 . 5

3 4 6 3 4 3 6

**Resolvamos situaciones**

Samuel tenía $120000, gastó de su dinero. ¿Cuánto dinero gastó? ¿Cuánto dinero le quedó?

Entonces, 

Por lo tanto Samuel **Gastó $90000**

Para determinar cuánto dinero le quedó debemos sustraer al dinero que tenía Samuel, el dinero que gastó, así

120000 – 90000 = 30000

Por lo tanto, **a Samuel le quedaron $ 30000**

**DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES**

Para dividir dos RACIONALES se multiplica el numerador del primer número racional con el denominador del segundo número racional, y el numerador del segundo número con el denominador del primero.

**Ejemplo:** Dividir 8 **÷** 1

1. 4
2. Multiplicamos el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción: 8 x 4 = 32
3. Multiplicamos el numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera fracción: 1 x 3 = 3

8 **÷** 1 = 32

3 4 3

**Resolvamos situaciones**

Luis compró una lavadora por $550000. Pagó del total, como cuota inicial y el resto en 10 cuotas mensuales iguales. ¿Cuánto pagó de cuota inicial y cuánto mensualmente?



**Solución**



**Por lo tanto Luis pagó $55000 de cuota inicial**

Y para determinar cuánto pagó mensualmente debemos restarle al valor total de la lavadora el valor que pagó de cuota inicial y dividirlo entre 10, que son el número de cuotas.

550000 – 55000 = 495000

495000 ÷ 10 =49500

Es decir, que **Luis pagó mensualmente $45900** (por 10 meses)

### POTENCIACIÓN

Si **b** es un número racional y **n** es un número entero positivo, entonces la definición de **bn** es exactamente igual a la conocida para **N**: **bn = b . b . b . b.......** donde **b** se denomina *base* y **n** es el *exponente.*

**Ejemplos:**

+ 3 3 = + 3 . + 3 . + 3

4 4 4 4

- 3 3 = - 3 . - 3 . - 3

4 4 4 4

Se cumplen las mismas reglas de los exponentes, que en **Z.**

* **Producto de potencias de la misma base**

**a m . a n = a m + n**

**b b b**

**Ejemplo:**

2 2 . 2 4 = 2 4 + 2 = 2 6

3 3 3 3

* **Potencia de un producto**

=

**a . b n a n . b n**

**c d c d**

**Ejemplo:**

7 . 5 4 = 7 4 . 5 4

3 2 3 2

* **División de potencias de la misma base**

**a m**

**b a**  m - n

=

**b**

**a n**

**b**

**Ejemplo:**

3 5

3 2

4

3 5 – 3

4

4

=

=

3 3

4

* **Potencia de una Potencia**

a m n a m . n

=

b b

**Ejemplo:**

5 6 2 5 6 . 2 5  12

=

9 9 9

* **Potencia de un cociente**

a m a m

b b

=

c c m

d d

Ejemplo:

3 2 3 2

=

7 7

2 2 2

5 5

###### LEYES DE LOS SIGNOS PARA LA POTENCIACIÓN

* Cuando un número racional *Positivo* o *Negativo* lo elevamos a un número natural *Par,* el resultado es un número racional *Positivo*.
* Cuando un número racional *Positivo* lo elevamos a un número natural *Impar,* el resultado es un número racional *Positivo.*
* Cuando un número racional *Negativo* lo elevamos a un número natural *Impar,* el resultado es un número racional *Negativo.*

### RADICACIÓN

Podemos utilizar la operación de radicación con los Racionales, de manera análoga a los números enteros:

Suponiendo que m es un racional y z, a son números naturales.

n

****

****

**Ejemplo:**

****

BD06937_

* **m . a = m . a**

z

z

z

**n b n b**

**Ejemplo:**

4 . 16 = 4 . 16

2

2

2

2

9 25 9 25

* 

**Ejemplo:**



* 

**Ejemplo:**

****

**FORMA DECIMAL DE UN NÚMERO RACIONAL**

Los Racionales se pueden expresar en forma decimal al dividir el numerador entre el denominador.

**Ejemplo:**

¿Cuál es la forma decimal de - 8 ?

5

- 8 5

30 -1, 6

0

Luego… la expresión decimal de – 8 = – 1, 6

5

**FORMA RACIONAL DE UN NÚMERO DECIMAL**

PE02658_Un número decimal se puede expresar como un racional siempre que cumpla una de las siguientes condiciones:

*- Su expansión decimal es finita*

**Ejemplo:**

Expresar como racional el número 2,75.

Multiplico por 100 y divido por 100.

2,75 = 275 = 11

100 4

Luego… 2,75 en forma racional corresponde a 11

4

* *Su expansión decimal es infinita y periódica*

**Ejemplo:**

Expresar como racional el número 1,333....

Existe un Racional que no conocemos y que es igual a 1,33 = 1,3. Llamémoslo *X*. Entonces:

X = 1,33...

Como la expansión decimal está conformada por un solo dígito que se repite, entonces multiplicamos la anterior expresión por 10:

10X = 13,33...

Ahora restamos la primera igualdad, de la segunda igualdad:

10X = 13,33...

- X = 1,33...

9X = 12

X = 12

9

X = 4

3

Por lo tanto, 4 es la fracción cuya expresión decimal es 1,33....

3

|  |
| --- |
| **CONÉCTATE CON LA HISTORIA**  Pese a que a nosotros no nos sorprenden, los números negativos fueron muy restringidos en los orígenes de la matemática. Los griegos, que admitían números naturales y fracciones, los desconocían casi en forma absoluta.  Para los matemáticos chinos de la antigüedad, los números podían pensarse como “excesos” o “faltas”. En sus cálculos diferenciaban unos de otros, utilizando (para los primeros) palitos rojos, y para los segundos, palitos negros.  En el siglo VI, matemáticos de la India, como Brahmagupta, también trabajaron con esos conceptos, afirmando que los números podían interpretarse como “pertenencias” o “deudas”.  La revolución cultural de los siglos XIV y XV conocida como Renacimiento, también afectó a la matemática y en particular dio lugar a cambios en el concepto de número, que poco a poco dejó de asociarse exclusivamente con la práctica del cálculo. El gran desarrollo científico del Renacimiento mostró la necesidad de un lenguaje simbólico que permitiese expresar las leyes y los fenómenos de la naturaleza que se estaban estudiando.  Pero el crecimiento de las teorías matemáticas siempre está estrechamente vinculado con el desarrollo de los símbolos; cuando éstos reflejan claramente un concepto, resulta sencillo trabajar con él. Hasta el Renacimiento los números negativos sólo habían sido “palitos negros” para los chinos o “deudas” para los indios.  Por otra parte, en las ciencias naturales surgió la necesidad de expresar temperaturas sobre y bajo cero; en física y astronomía se descubrió que si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, éste reacciona con una fuerza de igual magnitud pero de sentido contrario. Pero… ¿cómo representar numéricamente esa dinámica entre dos cuerpos? Quizás basados en una antigua práctica comercial por la que, para indicar que se había sacado o agregado mercancía de una bolsa, se escribía sobre ella **–** ó **+,** respectivamente, los matemáticos adoptaron esa notación para expresar números positivos y negativos.  Pero recién en el siglo XVI, cuando el francés Vieta adopta la notación literal (es decir; utiliza letras para representar números cualesquiera), se advierte que no tiene sentido pensar que “**a** – **b”** representa sólo un número cuando a es mayor que **b**, y los números negativos abandonan la condición de *marginados,*  para ingresar definitivamente a la comunidad de los números. |

**MAGNITUDES Y CANTIDADES**

### MAGNITUD

Magnitud es toda propiedad que se le puede medir a un cuerpo. Ejemplo, a una persona se le puede medir su estatura, su peso, su edad; por lo tanto, estas propiedades se llaman magnitudes.

j0078757

### CANTIDAD

Se llama cantidad de una magnitud al número acompañado de una unidad de medida utilizado para expresar dicha magnitud. Ejemplo, 25 km es una **cantidad** usada para expresar la **magnitud** de longitud.

Para comparar dos cantidades de una magnitud es necesario expresarlas en la misma unidad de medida.

**RAZONES, PROPORCIONES Y CORRELACIONES**

**RAZÓN**

Se llama *razón*  a la comparación (por cociente) de dos cantidades **a** y **b**. La razón entre dos magnitudes es un número, sin unidad de medida. Tal razón puede ser expresada como:

a : b ó como a

b

Muchas veces en la vida diaria y en las ciencias se necesita comparar medidas y cantidades. Cuando se desee comparar dos magnitudes tales como el largo y el ancho de una lámina, la longitud de dos segmentos, el área de dos figuras geométricas, la cantidad de hombres y mujeres de una región o de un país, la capacidad de dos recipientes o la votación obtenida por dos candidatos en una elección, se establece la relación entre dos magnitudes.

**Resolvamos situaciones**

Comparar el número de estampillas que tienen dos personas, sabiendo que la primera tiene 600 y la segunda 300.

Las cantidades se pueden comparar por su diferencia o por el cociente entre ambas:

* *Por su diferencia*:

600 – 300 = 300

Es decir, la primera persona tiene 300 estampillas más que la segunda persona.

* *Por cociente:*

600 = 2

300

Lo anterior significa que la primera persona tiene el doble de estampillas que la segunda.

BS01045_

Los términos de una razón se llaman **antecedente** y **consecuente.**

a antecedente

b consecuente

Toda razón tiene un cociente denominado valor de la razón.

Así, en la razón a = k, **k** se denomina valor de la razón.

El valor de la razón es sólo un número; por lo tanto, es independiente de toda unidad de medida en que estén expresados los términos de la razón.

En el lenguaje de los números racionales, decimos que el número de hombres es 2/3 el número de mujeres.

También podemos usar otro lenguaje: usando la palabra **razón**, así: “**la** **razón del número de hombres al de mujeres es 2 a 3”** y escribimos **2 : 3**

BD07097_

**Resolvamos situaciones**

Supongamos que una moto recorre 420 km por cada 4 galones de gasolina:

¿cuál es el rendimiento de la moto por galón de gasolina?

Llamamos rendimiento de la moto a la razón de los kilómetros recorridos

entre los galones consumidos.

Luego… el rendimiento de la moto es:

420 km = 80 km/galón

4 galones

**RAZONES IGUALES**

Decir que en un colegio hay 3 mujeres por cada 5 hombres, equivale a afirmar que hay 6 mujeres por cada 10 hombres. Es decir, la razón 3 es igual a la razón 6 , escribimos: 3 = 6

5 10 5 10

En forma semejante, decir que 25 niños de cada 70 están enfermos equivale a afirmar que 5 niños de cada 14 están enfermos; que cada 50 niños de 140 están enfermos; que cada 10 niños de 28 están enfermos, etc. Por lo tanto, podemos escribir:

PE02658_

5 = 10 = 15 = 20 = 25 =.... = 50 = 75

14 28 42 56 70 140 210

Llamamos serie de razones iguales a la *igualdad*  de dos o más razones.

Simbólicamente:

a = c = e = g =...

b d f h

Dada una razón, existen infinitas razones iguales a ella. En la práctica sólo se consideran series finitas de razones iguales.

Propiedad fundamental de una serie de razones iguales

Consideremos la siguiente serie de razones iguales:

1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6

3 6 9 12 15 18

Determinemos la razón entre la suma de los antecedentes y la suma de los consecuentes:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = 1

3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 63 3

Observemos que la razón entre la suma de los antecedentes y la de los consecuentes es igual a una de las razones de la serie dada.

Podemos generalizar el resultado anterior, mediante la siguiente propiedad conocida con el nombre de *propiedad fundamental de una serie de razones iguales*:

***“En toda serie de razones iguales, la razón entre la suma de los antecedentes y la suma de los consecuentes es igual a una cualquiera de las razones de la serie****”.*

**Ejemplo:**

Dada la serie de razones iguales:

2 = 6 = 12 = 18 = 24, entonces:

1 3 6 9 12

2 + 6 + 12 + 18 + 24 = 62 = 24 = 6 = 2 = 2

1 + 3 + 6 + 9 + 12 31 12 3 1

###### PROPORCIÓN

Se llama proporción a la igualdad de dos razones; a = c , o en otra forma, a : b :: c : d

b d

Se lee **a** es a **b** como **c** es a **d.**

En la proporción *a : b :: c : d*, a, b, c y d son respectivamente el primero, segundo, tercero y cuarto términos. El primero y cuarto términos se llaman **extremos** y el segundo y el tercero **medios.**

El cuarto término de una proporción se llama *cuarta proporcional* de los otros tres.

Cuando los medios o los extremos de una proporción son iguales, cualquiera de ellos se llama *media proporcional de los otros dos.*

En la proporción *a : b :: b : c*, b es la media proporcional entre a y c; esta media proporcional también recibe el nombre de *media geométrica.*

**TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES**

“Dos razones forman una proporción si y sólo si el producto de sus términos extremos es igual al producto de los términos medios”.

PE01709_

a = c

b d

Si y sólo si a . d = c . b con b y d ≠ 0

**Ejemplo:**

4 = 12

5 15

4 . 15 = 5 . 12

1. = 60

**CÁLCULO DE UN TÉRMINO DE UNA PROPORCIÓN**

La propiedad fundamental nos permite hallar el valor X de cualquier término desconocido de una proporción.

* Si el término desconocido es un extremo, entonces:

a = c, tenemos a . x = b . c x = b . c

b x a

x = c, tenemos x . d = b . c x = b . c

PE01821_b d d

* Si el término desconocido es un medio, entonces:

a = c, tenemos a . d = x . c x = a . d

x d c

a = x, tenemos a . d = b . x x = a . d

b d b

* Si las proporciones son medias proporcionales, entonces:

a = b, tenemos a . x = b . b x = b2

b x a

a = x, tenemos a . d = x2 x = ± a . d

x d

**PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES**

A partir de la proporción a = c se pueden obtener otras proporciones. A continuación se

b d

enuncian y se demuestran algunas de ellas. Completa las demostraciones que no aparecen o que se encuentran incompletas, y da ejemplos donde falten.

|  |  |
| --- | --- |
| **a.** Alternación de los términos extremos:  a = c si y sólo si d = c  b d b a  ***Demostración***  Como a = c entonces: a x d = x c que, por  b d  el teorema fundamental de las proporciones, equivale a escribir d = c  b a  ***Ejemplo***  3 = 12 entonces 28 = 12  7 28 7 3 | **b.** Alternación de los términos medios:  a = c si y sólo si a = b  b d c d  La demostración es similar a la anterior y se propone como ejercicio.  ***Ejemplo***  Si 3 = 12 entonces 3 = 7  7 28 12 28 |
| **c.** Inversión de las razones:  a = c si y sólo si b = d  b d a c  La demostración se propone como ejercicio  ***Ejemplo***  3 = 12 entonces 7 = 28  7 28 3 12 | **d.** Simetría:  a = c si y sólo si c = a  b d d b  Demuestra y plantea un ejemplo para verificar la propiedad. |
| **e.** Composición de la proporción con respecto al antecedente de cada razón:  a + b = c + d  a c  ***Demostración***  Como a = c entonces por la propiedad c : b = d  b d a c  Sumando 1 a lado y lado de la expresión se tiene que b + 1 = d + 1  a c  Completa el desarrollo de la demostración de la propiedad y escribe un ejemplo. | **f.** Composición de la proporción con respecto al consecuente de cada razón:  a = c sí y sólo si a + b = c + d  b d b d  La demostración y el ejemplo se proponen como ejercicio. |
| **g.**  Descomposición de la proporción con respecto al antecedente de cada razón:  a = c sí y sólo si a - b = c - d  b d a c  La demostración y el ejemplo se proponen como ejercicio. | **h.** Descomposición de la proporción con respeto al consecuente de cada razón:  a = c sí y sólo si a - b = c - d  b d b d  La demostración y el ejemplo se proponen como ejercicio. |
| **i.** Composición y descomposición de la proporción:  a = c sí y sólo si a + b = c + d  b d a - b c - d  ***Demostración***  Como a = c entonces bc - ad = 0. Esta última expresión equivale a 2bc – 2ad = 0, que puede  b d  reescribirse como: bc – ad = ad – bc. Al sumar la expresión ac - bd a lado y lado de la igualdad, se tiene que: bc – ad + ac – bd = ad – bc + ac – bd, que mediante un reagrupamiento conveniente equivale a:  (a + b) (c – d) = (a – b) (c + d)  o lo que es igual: a + b = c + d. Propón un ejemplo de verificación.  a – b c – d | |

**Ejemplo:**

La diferencia entre las edades de dos personas es de 21 años, y están en la razón 7 : 4

Calcular la edad de cada persona.

Designemos como p y q las edades; se sabe que p - q = 21 y p = 7. Efectuando la

q 4

descomposición de la proporción con respecto al consecuente, tenemos: p - q = 7 - 4

q 4

Como p - q = 21 en la proporción, resulta: 21 = 3

q 4

Aplicando el Teorema Fundamental, se tienen 3 x q = 21 x 4 de donde q = 28

Las personas tienen 49 y 28 años, respectivamente.

### PROPORCIONALIDAD DIRECTA, INVERSA Y COMPUESTA

**PROPORCIONALIDAD DIRECTA**

Dos magnitudes son *directamente proporcionales* si el cociente entre la magnitud dependiente y la independiente es constante; lo que significa que cuando al multiplicar o dividir una de las cantidades por un número, la otra queda multiplicada o dividida por dicho número.

**Resolvamos situaciones**

Don Humberto se dedica a la fabricación de escobas, cada una de las cuales la vende a $ 4. 000. Observa la tabla que relaciona la cantidad de escobas y el ingreso por su venta.

|  |  |
| --- | --- |
| Número de escobas | **Ingreso por vender todas las escobas ($)** |
| 1 | 4. 000 |
| 2 | 8. 000 |
| 3 | 12. 000 |
| 5 | 20. 000 |
| 10 | 40. 000 |

###### En este caso, el dinero que obtiene don Humberto por la venta de las escobas, depende del número de las que venda.

La información contenida en la tabla se puede disponer en un plano cartesiano en el que los valores de la variable independiente (o número de escobas)se localiza sobre el eje **X**,y la variable dependiente o ingreso por la venta, aparece en el eje **Y**.

HH02135_

40 000

36 000

32 000

28 000

24 000

20 000

16 000

12 000

8 000

4 000

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

La constante de proporcionalidad es 4. 000.

Según la gráfica, podemos decir que dos magnitudes son directamente proporcionales si al representarlas en un sistema de coordenadas cartesianas se obtienen puntos a lo largo de una línea recta que pasa por el origen del sistema.

###### PROPORCIONALIDAD INVERSA

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si el producto entre la magnitud dependiente y la independiente es constante.

De otra manera se puede decir que dos magnitudes son inversamente proporcionales si al aumentar una la otra disminuye, y viceversa.

**Resolvamos situaciones**

La cantidad de obreros que realizan una obra y el tiempo que tardan en ejecutarla: a mayor número de obreros, menor será la cantidad de tiempo que se requerirá para ejecutar la obra.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Número de trabajadores | 1 | 3 | 6 | 12 | 15 | 20 |
| **Tiempo empleado (en Días)** | 60 | 20 | 10 | 5 | 4 | 3 |

Observa que 1 . 60 = 3 . 20 = 6 . 10 = 12 . 5 = 15 . 4 = 20 . 3

¿Cuánto tiempo tardarán 30 obreros para completar la obra?

Veamos la siguiente tabla:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Número de trabajadores | 1 | 30 |
| **Tiempo empleado (en días)** | 60 | ? |

Como las magnitudes son inversamente proporcionales, están relacionadas por un producto constante:

1 . 60 = 30 . x , donde x = 2

Por lo tanto para realizar el trabajo, contando con 30 obreros, se necesitan 2 días.

***REGLA DE TRES SIMPLE***

Hace referencia a problemas de magnitudes proporcionales donde se conoce un par de cantidades correspondientes y otra cantidad de una de las magnitudes, a la cual hay que calcular la cantidad correspondiente en la otra magnitud. En este tipo de problemas sólo intervienen dos magnitudes.

Si las dos magnitudes son directamente proporcionales, se dice que es un problema de regla de tres simple directay si las magnitudes son inversamente proporcionales, se dice que es un problema de regla de tres simple directa*.*

**Resolvamos situaciones**

###### Si 8 m de cierto tipo de manguera cuestan $ 5. 600… ¿cuál será el precio de 20 m de la misma manguera?

Al analizar el enunciado encontramos que existe una relación entre la longitud y el precio: 8 m cuestan $ 5. 600; ahora nos preguntan por el valor que corresponde a una cantidad dada de una magnitud:

¿Cuál es el precio de 20 m?

Podemos plantear el problema de la siguiente manera:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Número de metros** | 8 | 20 |
| **Valor ($)** | 5 600 | x |

Observamos que las magnitudes son directamente proporcionales, y por tanto la razón entre dos cantidades de una magnitud es igual a la razón entre las correspondientes de la otra.

PE02554_ 8 = 5 600

20 x

x = 20 . 5 600 = 14. 000

8

Por lo tanto, los 20 m cuestan $ 14. 000

###### Proporcionalidad compuesta

###### Hay situaciones en las que el valor de una magnitud depende de los valores que tomen otras magnitudes. Por ejemplo, el tiempo que tarda un grupo de trabajadores en hacer una obra, depende del número de trabajadores y del tiempo que trabajen diariamente.

En un problema de proporcionalidad compuesta, intervienen varias magnitudes, de las cuales se conocen parejas de valores correspondientes, excepto de una, de la cual sólo se conoce un valor.

*Regla de tres compuesta directa*

Analicemos esta regla mediante un ejemplo.

**Resolvamos situaciones**

En una fábrica, 6 máquinas iguales producen en 3 horas 900 tuercas. ¿Cuántas tuercas, 12 de tales máquinas producen en 5 horas?

Planteamos el problema de la siguiente manera:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Número de máquinas** | **Número de horas de trabajo** | **Número de tuercas** |
| 6 | 3 | 900 |
| 12 | 5 | X |
| d | D | d |

###### Las letras d indican que la proporcionalidad entre el número de máquinas y el número de tuercas y entre el tiempo y el número de tuercas es directa.

Escribimos la proporción:

6 . 3 = 900

12 5 x

###### IN00676_

###### 18 = 900 donde x = 900 . 60 = 3 000

###### 60 x 18

Por lo tanto las 12 máquinas producen 3 000 tuercas.

**REGLA DE TRES COMPUESTA, DIRECTA E INVERSA**

Analicemos esta regla mediante un ejemplo:

**Resolvamos situaciones**

Para construir 5 apartamentos iguales en 45 días, se requieren 80 albañiles: ¿cuántos albañiles se necesitarán para construir 8 apartamentos en 60 días?

Planteamos el problema de la siguiente manera:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Número de apartamentos** | **Días** | **Número de albañiles** |
| 5 | 45 | 80 |
| 8 | 60 | X |
| D | I |  |

BD05197_Al escribir la proporción hay que tener en cuenta el invertir la razón de los días, ya que la magnitud de los días y la magnitud de los obreros son inversamente proporcionales.

5 . 60 = 80

8 45

###### x = 8 . 45 . 80 = 96

1. . 60

Por lo tanto se necesitan 96 albañiles.

**BIBLIOGRAFÍA**

|  |
| --- |
| RODRÍGUEZ, Benjamín P., et Al. Matemáticas, Prentice Hall, 2000.  URIBE, Julio A., ORTIZ, Marco T., Matemática Experimental 7, Uros Editores, 2004, segunda edición.  ARDILA, Víctor H., Olimpiadas Matemáticas 7, Voluntad,1999.  TORRES, Blanca N., Et Al, Supermat Matemáticas, Voluntad 2000.  Biblioteca de Consulta Encarta 2006. |

**CIBERGRAFÍA**

|  |
| --- |
| * [www20.brinkster.com/fmartinez/aritmetica7.htm](http://www.brinkster.com) * <http://usuarios.lycos.es/calculo21/id382.htm> * [www.escolcar.com](http://www.escolcar.com) * [www.eduteka.com](http://www.eduteka.com) * <http://www.educa.jcyl.es/wiris/manual/es/html/tour/objectesmatematics.html> |